Université de Bouira
Faculté des sciences
Département de mathématiques
2ème Année Licence LMD

Module: **Logique Mathematique**
2022-2023

TD **Série N° : 1** **Logique des propositions**

Solution

Exercice 1 :

✓ **D**onner les propositions (avec les variables propositionnelles)

- P = Socrate est un homme,
- Q = Médor est un chien,
- R = Il pleut
- S = Il fait beau,
- A = La caravane passe
- B = Les chiens aboient.
- C = L'enfant sait lire
- D = L'enfant sait écrire

✓ Ecrire en langage propositionnel les phrases suivantes :

1) $\neg P$: Socrate n'est pas un homme,
2) $\neg Q$: Médor n'est pas un chien,
3) $P \wedge Q$: Socrate est un homme et Médor est un chien,
4) $R \vee S$: Il pleut ou il fait beau,
5) $P \rightarrow Q$: Si Socrate est un homme, alors Médor est un chien
6) $A \rightarrow B$: Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
7) $\neg B$: Les chiens n'aboient pas.
8) $\neg A \vee B$: La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
9) $\neg B \wedge \neg A$: Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.
10) $C \wedge D$:L'enfant sait lire et écrire
11) $C \wedge \neg D$: l'enfant sait lire mais il ne sait pas écrire
12) $D \rightarrow C$: si l'enfant sait écrire alors il sait lire
13) $\neg C \vee \neg D$: l'enfant ne sait pas lire ou il ne sait pas écrire
14) $\neg C \wedge \neg D$: l'enfant ne sait pas lire et il ne sait pas écrire

Exercice 2 : Soit les propositions suivantes :

P: Khaled est sportif Q : Khaled sait nager R: Saïd est sportif S : Saïd sait nager

1) Ecrire en langage propositionnel les phrases suivantes :

a. Khaled et Saïd sont des sportifs ≡ $\mathbf{P \wedge R}$

b. Khaled et Saïd sont des sportifs mais ils ne savent pas nager ≡ $(\mathbf{P \wedge R}) \wedge (\neg Q \wedge \neg \mathbf{S})$

c. si Khaled n'est pas un sportif et sait nager alors Saïd ne sait pas nager ≡ $(\neg \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \neg \mathbf{S}$

2) traduisez les formules logiques suivantes en phrases du langage naturel :

(1) $P \wedge Q$ ≡ Khaled est un sportif et sait nager

(2) $(P \wedge \neg S) \rightarrow R$ ≡ si Khaled est sportif et Saïd ne sait pas nager alors Saïd est sportif

(3) $(Q \rightarrow P)$ ≡ si Khaled sait nager alors il est sportif

(4) $(\neg P) \vee (\neg Q)$ ≡ Khaled n'est pas un sportif ou il ne sait pas nager

(5) $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ ≡ Khaled n'est pas un sportif et il ne sait pas nager

(6) $P \leftrightarrow Q$ ≡ Khaled est un sportif seulement si il sait nager

(7) $(R \rightarrow \neg S) \vee \neg R$ ≡ Saïd n'est pas un sportif ou si il est sportif alors il ne sait pas nager

(8) $(Q \rightarrow P) \rightarrow S$ ≡ Saïd sait nager a condition de si Khaled sait nager alors il est sportif

(9) $\neg (P \vee R)$ ≡ Khaled et Saïd ne sont pas des sportifs

Exercice 3 :

Soient *K*, *S*, *D* les variables propositionnelles dénotant :

- *K* : « Katia a mangé le quart du gâteau »
- *S* : « Saliha a mangé le quart du gâteau »
- *D* : « Djamal a mangé le quart du gâteau »

Les déclarations des quatre enfants sont :

- Chabane : *K*
- Saliha : $\neg S$
- Katia : *D*
- Djamal : $\neg D$

Sachant que seulement une de ces quatre propositions est vraie, les différents cas de vérité sont les suivants :

	1	**2**	**3**	**4**
• Chabane :	***K***	¬K	¬K	¬**K**
• Saliha :	S	**¬*S***	S	**S**
• Katia :	¬D	¬D	**D**	¬**D**
• Djamal :	D	D	D	**¬D**

Les trois premières combinaisons mènent à des contradictions ; la quatrième n'engendre aucune contradiction, elle sera donc retenue : **c'est Saliha qui a mangé le quart du gâteau.**

Exercice 4 :

On a :

- α. (A chirurgien ⇒ B dentiste),
- β. (A dentiste ⇒ B pharmacien),
- γ. (B non chirurgien ⇒ C dentiste).

α, β et γ sont vraies simultanément et A, B, C ont chacun une profession différente parmi pharmacien, dentiste et chirurgien.

1. Si A est chirurgien alors d'après α, B est dentiste donc B non chirurgien est vraie ce qui implique C est dentiste d'après γ ⇒ contradiction car B et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.
2. Si A est dentiste alors d'après β B est pharmacien donc B non chirurgien est vraie ce qui implique C est dentiste d'après γ ⇒ contradiction car A et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.

D'où : A est pharmacien.

3. Si B est dentiste alors B non chirurgien est vraie donc d'après γ C est dentiste ce qui implique une contradiction car B et C ne peuvent pas être dentistes tous les deux.

D'où : B est chirurgien.

Conclusion :

- A est pharmacien,
- B est chirurgien,
- C est dentiste.

Exercice 8 **:** Construire l'arbre de décomposition de la formule suivante :

- $\neg ((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow (R \vee \neg S))$

Si P = V ; Q = F ; R = F ; S = V ; Évaluer la formule en utilisant la notation préfixée .

Exercice 9 **:** L'ensemble T = { $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$, $\neg P$} est-il satisfiable ?

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\neg P$
0	0	**0**	**0**	1	1	1
0	1	0	1	1	**0**	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Rappelle : Un ensemble de formules T = {$\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$} est dit satisfiable ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$, il existe au moins une ligne où $\boldsymbol{\alpha 1}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$,.., $\boldsymbol{\alpha n}$ sont vraies simultanément

Dans cet exercice, aucune ligne où $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha 2}$, .. , sont vraies en même temps donc : T est insatisfiable (T n'est pas satisfiable)

Exercice 10 **:** $P \rightarrow Q \vDash P \leftrightarrow Q$?

La quetion est : « est ce que $P \leftrightarrow Q$ est une conséquence logique de $P \rightarrow Q$? »

Rappelle : Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite **conséquence logique** de $\boldsymbol{\alpha}$ ssi : Etant donné les tables de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$ **est vraie** sur toutes les lignes où $\boldsymbol{\alpha}$ **est vraie** (on note $\boldsymbol{\alpha} \vdash$)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1
0	1	**1**	**0**
1	0	0	0
1	1	1	1

Dans la deuxième ligne $P \rightarrow Q$ est vrai mais $P \leftrightarrow Q$ est faux donc $P \leftrightarrow Q$ n'est pas une conséquence logique de $P \rightarrow Q$; Mais le contraire est oui $P \leftrightarrow Q \vDash P \rightarrow Q$

Exercice 11 : (Formule satisfiable, tautologies) Soit $\Gamma=\{\alpha\to(\beta\to\alpha),\neg\alpha\to\gamma\to\neg\gamma,\alpha,\neg\beta,\neg\gamma\}$ un ensemble de formules dans le langage de la logique propositionnelle.

Il nous faut la table de vérité : (, β , γ sont des formules)

α	β	γ	$\alpha\to(\beta\to\alpha)$	$\neg\alpha\to\gamma\to\neg\gamma$	$\neg\beta$	$\neg\gamma$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

il existe une seule ligne où tous les éléments de l'ensemble Γ sont vrais simultanément , dans cette ligne, nous avons la combinaison suivante :

$\alpha =$ vrai	$\beta =$ faux	$\gamma =$ faux

a) **Donner un exemple de $\{\alpha, \beta,,\delta\}$ pour que Γ soit satisfiable -----→ erreur ; $\{\alpha, \beta,\gamma\}$**

Γ est satisfiable $\Rightarrow$ il existe au moins une ligne où tous les éléments de Γ sont vraies simultanément

$\Rightarrow$ **(α = vrai, β = faux, γ = faux)**

, β , γ sont des formules

un exemple (par les proposition) de $\{\alpha, \beta,\}$ pour que Γ soit satisfiable

$\alpha = P$	$\beta = Q$	$\gamma = \neg P \vee Q$

b) Donner un exemple de $\{\alpha, \beta,,\delta\}$ pour que Γ soit non satisfiable

un exemple (par les proposition) de $\{\alpha, \beta,\}$ pour que Γ soit satisfiable

$\alpha = P$	$\beta = Q$	$\gamma = P \vee Q$

c) Donner un exemple de $\{\alpha, \beta,,\delta\}$ pour que $\Gamma\vDash \gamma\to(\beta\to\alpha)$

Tous les exemples sont valables car $\gamma\to(\beta\to\alpha)$ est toujours vrai

Exercice 12 : (tautologies) A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des tautologies.

- $P \vee \neg P$ (principe du tiers exclu) ***oui***
- $\neg(P \wedge \neg P)$ (principe de non-contradiction) ***oui***
- $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$ (commutativité de $\vee$) ***oui***
- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ (le vrai est impliqué par tout) ***oui***
- $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (le faux implique tout) ***oui***
- $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$ (preuve par l'absurde) ***oui***
- $((\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow P$ (preuve par l'absurde) ***oui***
- $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (transitivité de $\rightarrow$) ***oui***

P	Q	R	¬P	¬Q	¬R	….	….	….	….
0	0	0	….	….	….	….	….	….	**1**
0	0	1	….	….	….	….	….	….	**1**
0	1	0	….	….	….	….	….	….	**1**
0	1	1	….	….	….	….	….	….	**1**
1	0	0	….	….	….	….	….	….	**1**
1	0	1	….	….	….	….	….	….	**1**
1	1	0	….	….	….	….	….	….	**1**
1	1	1	….	….	….	….	….	….	**1**

Rappelle : Une formule α est dite **Tautologie** (formule valide) ssi : Etant donné la table de vérité de α, α est **vraie** sur toutes les lignes. (On note : $\models$), En d'autres termes, dans la table de vérité il n'y a que la valeur **vrai** comme résultat.

Exercice 13 **:** Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes :

- $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow Q)$
- $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vee (R \rightarrow Q)$

Rappelle : Une formule α est **sous forme normale conjonctive (FNC)** si elle est de la forme **$C1 \wedge C2 \wedge \ldots \wedge Cn$,** tel que les **Ci** sont de la forme **$L1 \vee L2 \vee \cdots \vee Ln$** (les **Li** sont des littéraux, les **Ci** sont des clauses), On appelle forme normale conjonctive (FNC) toute conjonction de disjonction de littéraux .

Rappelle : Une formule α est **sous forme normale disjonctive (FND)** si elle est de la forme **$C1 \vee C2 \vee \ldots \vee Cn$** tel que les **Ci** sont de la forme **$L1 \wedge L2 \wedge \ldots \wedge Ln$** (les **Li** sont des littéraux) ; On appelle forme normale disjonctive (FND) toute disjonction de conjonction de littéraux.

- $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow Q)$

- $\mathbf{P \rightarrow R} \equiv \neg P \vee R \equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee R)$
- $\mathbf{R \rightarrow Q} \equiv \neg R \vee Q \equiv (\neg R \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q)$

➢ $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee R) \vee (\neg R \vee Q)$

$\equiv ((\neg P \wedge \neg P) \vee (R \wedge R)) \vee ((\neg R \wedge \neg R) \vee (Q \wedge Q))$ ….. $P \equiv P \wedge P$

$\boldsymbol{\equiv (\neg P \wedge \neg P) \vee (R \wedge R) \vee (\neg R \wedge \neg R) \vee (Q \wedge Q)}$ **….. FND**

……… .

……

…

; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;